

Internet Electronic Journal*

Nanociencia et Moletrónica

Diciembre 2012, Vol.10, N°2, pp 1859-1876

Dinámica de estados comprimidos de Kennard y squeeziions en el potencial armónico: A la memoria de Ehrenfest y Kennard por los 85 años de la publicación de sus artículos de 1927

T. L. Belyaeva¹, C. A. Ramírez-Medina¹, and V. N. Serkin²

¹Universidad Autónoma del Estado de México, C. P. 50000 Toluca, México

²Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, C. P. 72001, Puebla, México

recibido: 16.11.12

revisado: 22.12.12

publicado: 31.12.12

Citation of the article;

T. L. Belyaeva ,C. A. Ramírez-Medina, and V. N. Serkin

Dinámica de estados comprimidos de Kennard y squeeziions en el potencial armónico: A la memoria de Ehrenfest y Kennard por los 85 años de la publicación de sus artículos de 1927
Int. Electron J. Nanoc. Moletrón, 2012, Vol. 10, N°2, pp.1859-1876

Dinámica de estados comprimidos de Kennard y squeezions en el potencial armónico: A la memoria de Ehrenfest y Kennard por los 85 años de la publicación de sus artículos de 1927

T. L. Belyaeva¹, C. A. Ramírez-Medina¹, and V. N. Serkin²

¹Universidad Autónoma del Estado de México, C. P. 50000 Toluca, México

²Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, C. P. 72001, Puebla, México

recibido: 16.11.12

revisado: 22.12.12

publicado: 31.12.12

Internet Electron. J. Nanoc. Moletrón., 2012, Vol.10 , N° 2, pp 1859-1876

RESUMEN

En este trabajo, estudiamos una generalización del teorema de Ehrenfest, que consiste en calcular la evolución espacio-temporal de la dispersión y el segundo momento de un paquete de ondas. Con este método, analizamos la dinámica lineal y no-lineal de los paquetes de ondas Gaussianos con variación de parámetros (amplitud, anchura, y fase) en el potencial del oscilador armónico conocidos en mecánica cuántica como estados coherentes y comprimidos.

1. Introducción

"Los acontecimientos venideros proyectan su sombra delante de ellos". El descubrimiento de paquetes de ondas oscilantes de un oscilador armónico, conocido en muchas ramas de la física moderna como estados coherentes y comprimidos, ofrece un ejemplo sorprendente que los científicos destacados estuvieron muy por delante de su tiempo. Cuando la mecánica cuántica tenía tan sólo unos meses de edad, en el artículo titulado "The continuous transition from micro- to macro-mechanics"¹, Schrödinger introdujo el concepto de "grupo de onda oscilante como representación de una partícula en la mecánica ondulatoria". Inspirado por la dualidad onda-partícula de de Broglie, Schrödinger reconoció que si el estado inicial de un oscilador cuántico representa una función de onda del estado fundamental desplazado desde el origen, entonces, su evolución en el tiempo se puede calcular exactamente como una superposición lineal de los estados propios correspondientes a los términos de orden superior de los polinomios de Hermite y este estado "puede representar una "partícula", que está ejecutando "movimiento", resultado conocido para la mecánica clásica... El número y la amplitud de la "surcos" o "wavelets" dentro de la partícula pueden variar con el tiempo. Los wavelets son más numerosos y más estrechos cuando pasan por el centro, se vuelven completamente suavizados en los puntos de inflexión... Nuestro grupo de ondas siempre permanece compacto, y no se extiende con el tiempo"¹.

El potencial de oscilador armónico prevé que la localización de la densidad de probabilidad se extienda. Esta propiedad explica el nombre de "estado coherente" dado por Glauber² para una descripción cuántica de las fuentes de luz coherentes con el advenimiento de la era del láser y la óptica cuántica. Históricamente, el descubrimiento de los estados coherentes de un oscilador armónico se remonta a 1927, cuando Kennard publicó el célebre artículo "The quantum mechanics of simple types of motion"³. Ha sido precisamente esta investigación, donde las amplitudes fundamentales para que la partícula se propagan desde el punto x_0 a punto x_1 durante el tiempo Δt , (conocidos actualmente como propagadores o funciones espaciales de Green), han sido descubiertos para diferentes tipos de potenciales incluyendo el potencial de oscilador armónico³. Como consecuencia de esto, una clase más de paquetes de ondas oscilantes ha sido descubierto por Kennard para anchuras iniciales arbitrarias y localizaciones de las funciones de onda que no se limitan simplemente por el estado base desplazado, pero, por ejemplo, más ancho o más nítida de la misma. Estas soluciones ahora se llaman estados comprimidos.

Kennard derivó la relación de incertidumbre de Heisenberg dependiente del tiempo para estos estados de paquetes de oscilación de onda, explicó su esencia física y también obtuvo estados de Schrödinger (coherentes) como los estados de mínima incertidumbre (más detalles se pueden encontrar en las Refs.³⁻⁶). Los estados descubiertos en el trabajo de Kennard son realmente notables por varias razones. El paquete de ondas permanece Gaussiano en cualquier momento, mientras que su anchura y amplitud oscila. La Fig. 1 muestra un ejemplo del paquete ondas correspondientes a un estado coherente del potencial armónico.

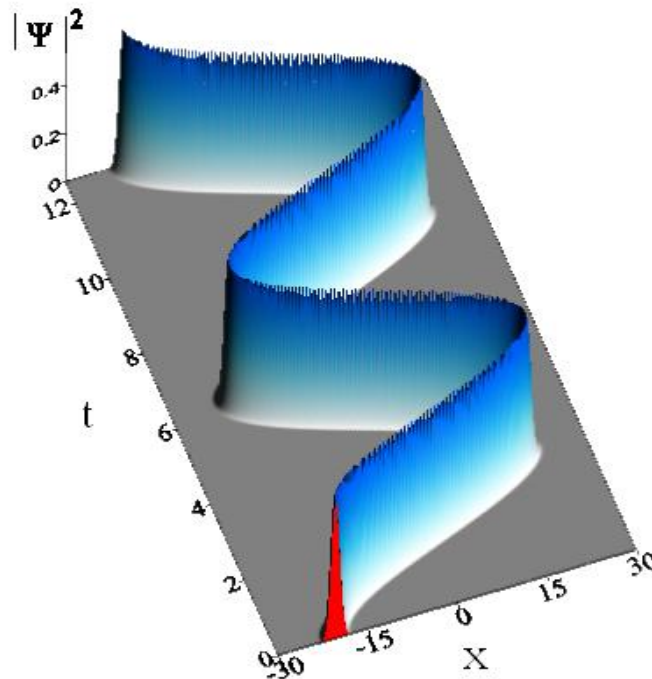


Fig. 1. Un estado coherente del potencial armónico con la anchura inicial $a_0=1$ y desplazamiento inicial $x_0=-20$.

Si el estado inicial tiene su anchura mayor que la anchura del estado propio del potencial, la densidad de probabilidad representa la compresión periódica y la función de onda Gaussiana puede ser fuertemente localizada en el espacio (véase Fig. 2). Esta propiedad de la función explica el nombre de "estado comprimido" (en inglés, squeezed states) dado por Hollenhorst⁷. A través de los años, ha habido muchas contribuciones significativas al desarrollo de la teoría de los estados coherentes y comprimidos y sus estudios experimentales (ver por ejemplo⁵⁻⁸ y las referencias ahí mencionadas).

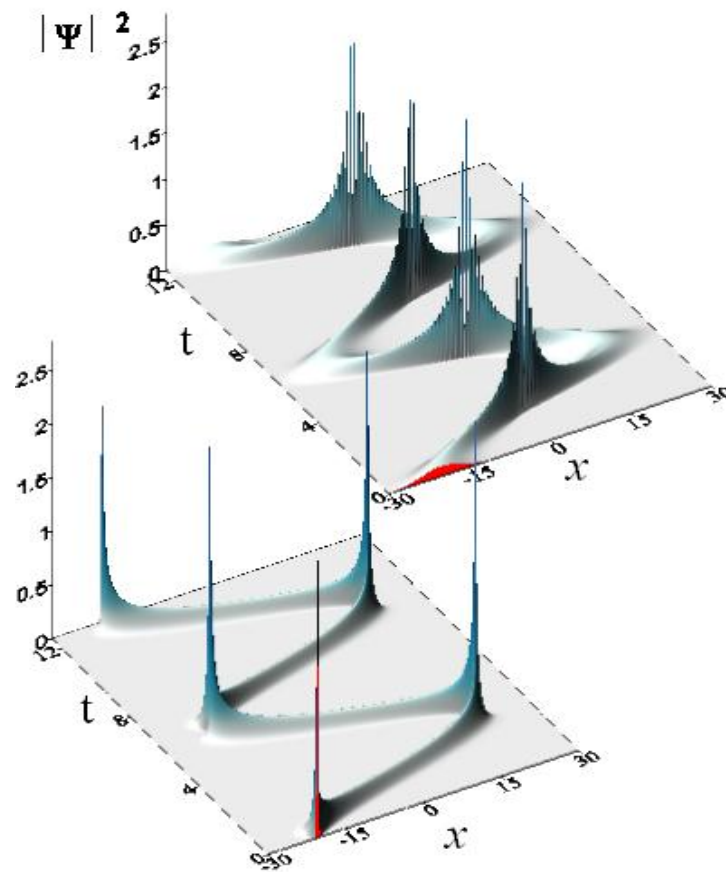


Fig. 2. Ejemplos de dos estados comprimidos del potencial armónico con la anchura inicial $a_0=0.25$ (arriba) y $a_0=2.0$ (abajo) y desplazamiento inicial $x_0=-20$.

El estado coherente no es el único estado que mantiene su forma constante durante la evolución en el tiempo, y el estado comprimido no es sólo un estado en el que la localización de la posición y del momento oscilan periódicamente. Los estados coherentes y comprimidos pares e impares (conocidos también como "estados de ambos sexos del gato de Schrodinger"⁹) han sido descubiertos e investigados⁶. Todos los estados propios Hermite-Gaussianos de un oscilador armónico desplazados inicialmente pueden formar estados coherentes y comprimidos de orden superior⁷. El hecho menos conocido es que los estados tanto pares e impares coherentes y comprimidos pueden ser considerados como paquetes de ondas que interactúan elásticamente, a pesar de que no son ortogonales⁹, como se ejemplifica en la Fig. 3.

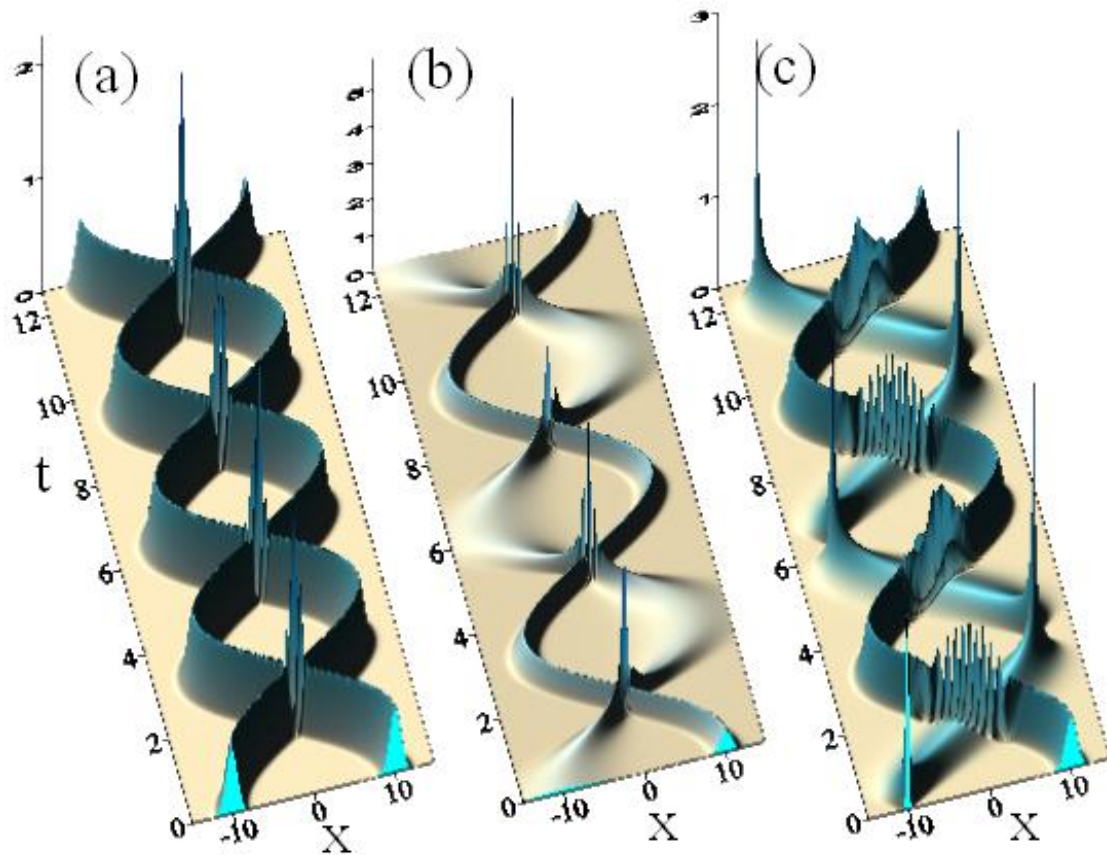


Fig.3. Interacción de dos paquetes comprimido Gaussianos normalizados a 1.0. (a) dos paquetes con $a_0=1.0$; (b) un paquete con $a_0=0.2$ y otro con $a_0=0.5$; (c) un paquete con $a_0=2.5$ y otro con $a_0=1$.

En este trabajo, consideramos una generalización del teorema de Ehrenfest que permite describir los estados coherentes y comprimidos del oscilador armónico. Insistimos en que nuestros objetivos principales han sido la educación, es por eso que, paso a paso, consideramos un enfoque analítico principal y presentamos todos los resultados directos de experimentos computacionales.

Este año celebramos 85 años del trabajo de Kennard. Nos gustaría confirmar que Kennard y Ehrenfest eran educadores brillantes. Por ejemplo, el profesor Earle H. Kennard, "uno de los participantes en el apasionante período temprano de la física moderna", fue editor de la revista *Physical Review* en el momento cuando la teoría cuántica entró en su cuenta. Su libro "La teoría cinética de los gases" (1938), sigue siendo considerado un clásico y fue publicado en las Series Internacionales de Física. Tras la muerte de F. K. Richtmyer, Kennard se

comprometió a re-escribir el libro "Introducción a la Física Moderna" (ver ¹¹), que ganó una amplia aceptación en la comunidad científica.

El profesor Paul Ehrenfest en sus conferencias se centró en modelos simples y ejemplos para ilustrar y aclarar los conceptos difíciles de la física moderna. Sus clases eran pequeñas e hizo un esfuerzo para llegar a conocer a los estudiantes que estuvieran apasionados por la física. Según Einstein: "No solo era el mejor maestro en nuestra profesión que he conocido; también estaba apasionadamente preocupado por el desarrollo y el destino de las personas, especialmente sus alumnos. Entender a los demás, ganar su amistad y confianza, ayudar a cualquier persona involucrada en luchas interiores o exteriores, fomentar el talento juvenil - todo esto era su verdadero talento, casi más que su inmersión en los problemas científicos"¹¹.

Si Ehrenfest sentía que había algo más que podía enseñar a sus alumnos, los enviaría a otros centros en Europa para más entrenamiento. También los animaría a aceptar puestos en el extranjero.

Por esta razón queremos dedicar este artículo a la memoria y gran trabajo realizado por P. Ehrenfest y E. H. Kennard, grandes investigadores y colaboradores en el desarrollo de la ciencia, así mismo como destacados docentes y divulgadores de física.

2. El teorema de Ehrenfest

El teorema de Ehrenfest es la ecuación que describe la tasa de cambio de valores promedio de la coordenada y el momento en mecánica cuántica y es un método útil para el análisis de problemas mecánico-cuánticos. Su deducción es relativamente sencilla, partiendo de la ecuación lineal de Schrödinger (SE) dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi \quad (1)$$

Obteniendo resultados importantes para el caso en Mecánica Cuántica como

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi | \Psi \rangle = 0 \text{ de donde se considera } \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1.$$

Aquí vemos que $|\Psi(x,t)|^2$ es la densidad de probabilidad de medir la localización de una partícula en la coordenada x al tiempo t . Por la definición de probabilidad, el promedio de muchas mediciones tiene que dar siguiendo el resultado

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx / \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx, \quad (2)$$

donde $\langle x \rangle$ se llama el valor esperado de x . Así mismo el valor esperado de cualquier función de x es

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\Psi|^2 dx / \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx. \quad (3)$$

En general, resultados de varias mediciones diferentes de x serán encontrados alrededor de su valor esperado $\langle x \rangle$. El grado de dispersión se presenta por la cantidad

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |\Psi|^2 dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (4)$$

que se llama la dispersión de x . La raíz cuadrada de σ_x^2 se llama la desviación estándar de x . Esperamos en general que los resultados de mediación de x van a estar adentro de desviaciones estándares de su valor espectado.

Siguiendo al artículo de Ehrenfest¹⁰, escribimos:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx / \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi dx \\ &= -i\hbar \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) dx = m \int_{-\infty}^{\infty} j dx, \end{aligned}$$

Donde $j = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$ se llama el corriente de probabilidad.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= m \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) dx = \\ &= -m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} j dx = m \int_{-\infty}^{\infty} j dx = \langle p \rangle. \end{aligned}$$

De lo anterior sigue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle p \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right] dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Substituyendo de la Ec. (1) y simplificando Ec. (5), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + V(x) \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial x} \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} V(x) |\Psi|^2 dx, \end{aligned} \quad (6)$$

donde fue hecha la integración por partes.

Finalmente, el teorema de Ehrenfest dice que

$$m \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \langle p \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = - \left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle,$$

ó

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = \left\langle - \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle.$$

El valor esperado de coordenada espacial y el momento satisfacen las ecuaciones de evolución análogas a las de mecánica clásica. Así se puede ver que la mecánica cuántica contempla como límite a la mecánica clásica, o la segunda ley de Newton

En general, el teorema de Ehrenfest sigue fácilmente de la ecuación para la tasa de cambio de valores promedio de cantidades físicas observables

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \quad (7)$$

donde A es un operador cuántico de un observable, $\hat{A} = \hat{A}(\hat{x}, \hat{p})$, y los operadores de coordenada y momento son $\hat{x} = x$ y $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, respectivamente.

3. Generalización para la Ecuación No-lineal de Schrödinger

Este teorema puede ser generalizado para la Ecuación No-lineal de Schrödinger (NLSE) ²¹

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - R |\Psi|^2 \Psi + V(x) \Psi \quad (8)$$

Para el caso general consideraremos que $N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx$ es un constante, no necesariamente igual a uno ($N_0 = 1$ en mecánica cuántica). Siguiendo el método de Ehrenfest obtenemos expresiones para cantidades conservadas, como el Hamiltoniano del sistema, asociado con el valor promedio de la energía del mismo $\langle E \rangle = H_{01}$:

$$H_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 - \frac{1}{2} R |\Psi|^4 + V |\Psi|^2 \right] dx. \quad (9)$$

La evolución espacio-temporal del primer momento, asociado con la trayectoria del centro de masa de un paquete de ondas no lineal se describe con la ecuación análoga a las Ec. (6)

$$i N_0 \frac{d \langle x \rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx. \quad (10)$$

4. Generalización para el segundo momento

Por el mismo método obtenemos la relación para evolución espacio-temporal del segundo momento, es decir la segunda derivada temporal del valor promedio de x^2 .

$$N_0 \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[2 \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 - R |\Psi|^4 - 2 \Psi^* x \frac{\partial V(x)}{\partial x} \Psi \right] dx \quad (11)$$

Sustituyendo la Ec. (9), obtenemos

$$N_0 \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} = 4 H_{01} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[2V + x \frac{\partial V}{\partial x} \right] |\Psi|^2 dx \quad (12)$$

5. Paquete de ondas Gaussiano con parámetros variables

Para nuestro caso particular consideraremos un paquete de ondas de la forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{a(t)}\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2(t)} x^2 - i \frac{da/dt}{2a(t)} x^2 \right\} \quad (13)$$

Con $N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$ y el parámetro $a(t)$ dependiente del tiempo.

El potencial externo será el potencial del oscilador armónico $V(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2$, el

Hamiltoniano para el sistema es $H_{01} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \omega^2 a^2 \right)$

Para el caso de la SE lineal, mediante la Ec. (12) obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \omega^2 a^2 \quad (14)$$

donde

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{2}, \quad (15)$$

Igualando Ec. (14) y Ec. (15) obtenemos

$$\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{a^3} + \omega^2 a = 0. \quad (16)$$

6. Ecuación de Ermakov

Vasilij Petrovich Ermakov (1845-1922) fue un matemático ruso que trabajó en el campo de convergencia de series infinitas. Sus contribuciones fueron publicadas en los artículos: "The general theory of convergence of series" y "A new sign of convergence and divergence of infinite series of alternating". Recibió su grado de doctor por su tesis "Integration of differential equations of mechanics"¹³. Resolvió la ecuación diferencial no lineal Ec. (16) que ahora lleva su nombre.

La ecuación Ermakov¹³ Ec. (16) fue generalizada por Edmund Pinney para el caso cuando ω depende del tiempo, $\omega = \omega(t)$ y en esta forma recibe el nombre

de la ecuación Ermakov-Pinney¹⁵. Es un claro ejemplo de una ecuación diferencial no lineal, la cual es relevante en algunos contextos físicos, como cosmología, teoría cuántica de campos, mecánica cuántica por mencionar algunos (ver Refs.¹⁶⁻¹⁸). En 1950 E. Pinney presentó la solución de esta ecuación

$$a = Au^2 + 2Buv + Cv^2, \quad (17)$$

con $u(t)$ y $v(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $\frac{d^2a}{dt^2} + \omega^2a = 0$. Para nuestro caso ω no depende del tiempo.

Hacemos la sustitución $\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{1}{2da/dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{da}{dt} \right)^2$ en la Ec. (16) y obtenemos

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{2Aa^2 - 1 - \omega^2a^4}{a^2}} \quad (18)$$

Lo cual es fácil integrar para obtener la solución

$$a^2(t) = \frac{1}{\omega^2} (A \pm B \sin(\omega(\pm 2t + C))) \quad (19)$$

Usando las condiciones $\frac{da}{dt}(t=0) = 0$ y $a(t=0) = a_0$

$$a^2(t) = \frac{1}{\omega^2} (A \pm B \cos(2\omega t)) \quad (20)$$

Donde $A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_0^2} + \omega^2 a_0^2 \right)$ y $B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_0^2} - \omega^2 a_0^2 \right)$.

7. Interacción de paquetes lineales y no lineales.

Aquí vemos que la Ec. (8) tiene una clase de soluciones exactas tipo paquetes de ondas oscilantes Ec. (13). Analizando la solución Ec. (20), vemos que en general describe un estado de Kennard, es decir, un estado comprimido o una onda localizada, la posición, el impulso, anchura y amplitud de la cual oscilan periódicamente. El caso especial del estado comprimido, cuando $(1/a_0^2 = \omega^2 a_0^2)$, ó $\omega = 1/a^2$ corresponde a los paquetes de ondas que presentan los estados propios del Hamiltoniano del oscilador armónico desplazado, para los cuales la relación de incertidumbre de Heisenberg se minimiza. Estos estados son los estados coherentes.

Los estados coherentes y comprimidos se comportan como ondas no lineales solitarias (solitones), que son las soluciones de la NLSE Ec. (8) con $V(x)=0$ y $R=1$. La propiedad más celebre de solitones es que ellos interactúan “elásticamente”. Los estados coherentes y comprimidos también son paquetes de ondas que interactúan elásticamente como se ejemplifica en la Fig. 4.

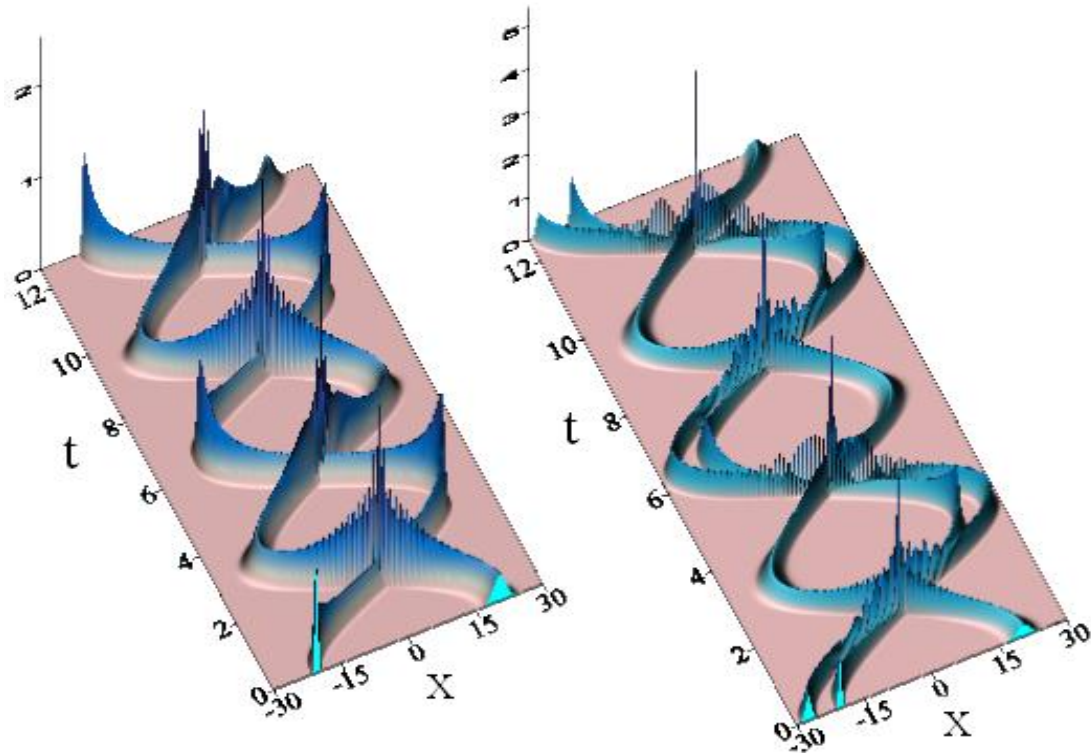


Fig. 4. Interacción de dos y tres paquetes Gaussianos comprimidos: (a) un con $a_0=1.0$ y otro con $a_0=0.5$; (b) un con $a=1.0$ y otros dos con $a_0=0.5$ y $a_0=2.0$.

La interacción de paquetes comprimidos, como de los solitones, depende de sus fases iniciales. Dos paquetes con fases iniciales iguales forman un máximo en el punto de choque, pero dos paquetes con fase iniciales opuestas forman un mínimo en este punto (véase Fig. 5).

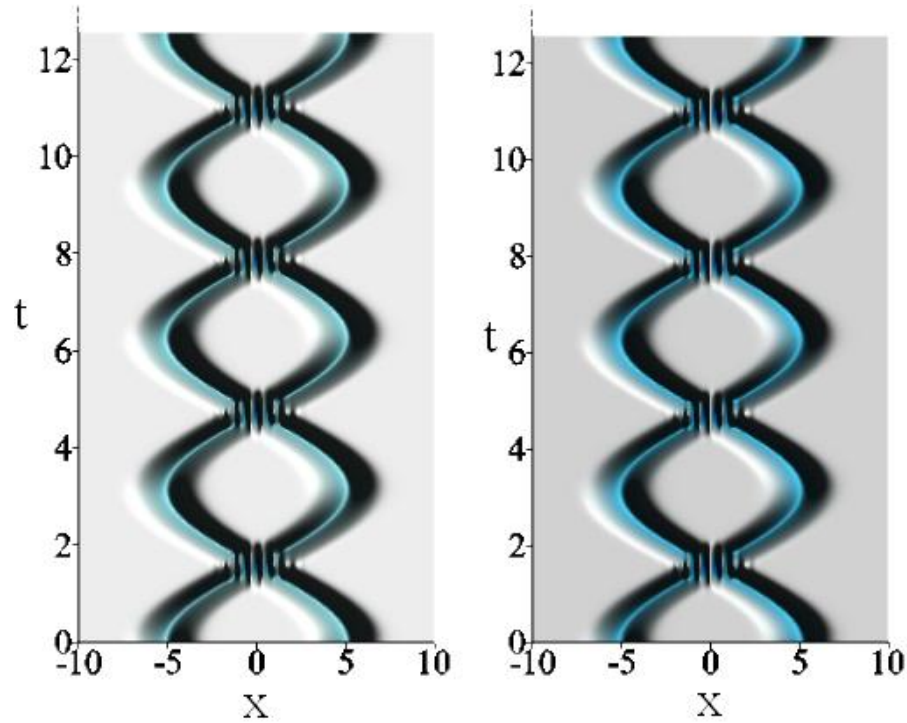


Fig. 5. Comparación de interacción de dos paquetes coherentes con las fases iguales y opuestas (un paquete positivo y otro negativo). Se ve que en el centro se forma máximo o mínimo de intensidad.

Hace quince años, Kumar y Hasegawa encontraron una solución general de la NLSE Ec. (8) y la llamaron un quasi-soliton^{19,20}. Sus propiedades y comportamiento son muy parecidos a los de estados coherentes: colisionan elásticamente; como se muestra en el Fig. 6 (a). Nuestro método permítanos encontrar la otra solución de la NLSE parecido a los estados comprimidos (véase Fig. 6 (b)). Estas soluciones no solo interactúan elásticamente, varían sus anchuras y amplitudes, es decir, “respiran”. Usando una analogía con estados comprimidos de Kennard, llamamos estos nuevos quasi-solitones como squeeziions.

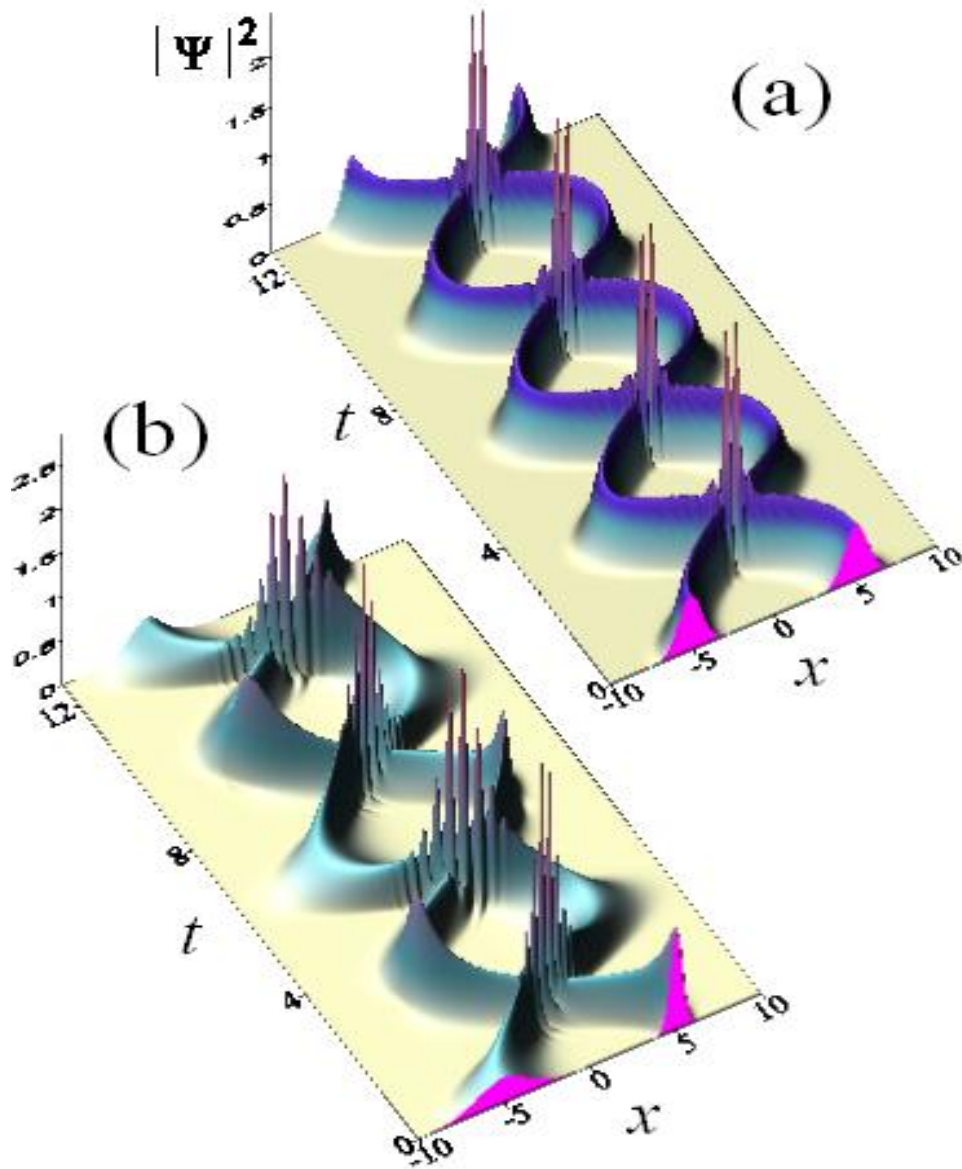


Fig. 6. (a) Interacción elástica de dos quasi-solitones de Kumar y Hasegawa con $a_0=1.0$; (b) Interacción elástica de dos squeeziones de Kennard con $a_0=0.5$ y $a_0=2.0$.

Nótese que estas soluciones difieren de los solitones no autónomos obtenidos en la Ref.²¹ en el marco del modelo de la NLSE no autónomo con potencial de oscilador armónico que varía con el tiempo.

8. Conclusión

Este artículo está dedicado a la memoria y gran trabajo realizado por P. Ehrenfest y E. H. Kennard hace 85 años, en 1927, grandes investigadores y colaboradores en el desarrollo de la ciencia, así como destacados docentes y divulgadores de física.

En este trabajo, estudiamos una generalización del teorema de Ehrenfest, que consiste en calcular la evolución espacio-temporal de la dispersión y el segundo momento de un paquete de ondas. Con este método, analizamos la dinámica lineal y no-lineal de los paquetes de ondas Gaussianos con variación de parámetros (amplitud, anchura, y fase) en el potencial del oscilador armónico. En mecánica cuántica estos estados están conocidos como estados coherentes y comprimidos.

Hace quince años, Kumar y Hasegawa encontraron una solución general de la NLSE Ec. (8) y la llamaron un quasi-soliton^{19,20}.

Nuestro método permítanos encontrar la otra solución de la NLSE parecido a los estados comprimidos (véase Fig. 6 (b)). Estas soluciones no solo interactúan elásticamente, varían sus anchuras y amplitudes, es decir, “respiran”. Usando una analogía con estados comprimidos de Kennard, llamamos estos nuevos quasi-solitones como squeeziions.

Referencias

- [1] E. Schrödinger, Nature 14, 664 (1926).
- [2] E. Schrödinger, Collected Papers on Wave Mechanics (Chelsea Publishing Company, New York, N. Y. 1928)
- [3] E. H. Kennard, Zeitschrift für Physik. Bd, XLIV (1927).
- [4] R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett. 10, 84 (1963). J. R. Klauder and E. C. Sudarshan, Fundamentalsof Quantum Optics, Benjamin, New York, 1968 Berlin, 2003). J. R. Klauder and B.-S. Skaderstam, Coherent states: Applications in Physics and Mathematical Physics (Word Scientific, Singapore, 11985).
- [5] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, Physica 72, 597 (1974).
- [6] V. I. Man'ko, Introduction to quantum optics (arXiv:quant-ph/9509018, 1995).
- [7] J. N. Hollenhorst, Phys. Rev. D 19, 1669 (1979).

- [8] M. M. Nieto, D. R. Truax, *Optics Commun.* 179, 197 (2000).
- [9] Un estado que es una superposición de dos estados muy distintos (por ejemplo, dos funciones de onda Gaussianas que se localizan en diferentes regiones del espacio) es a menudo llamado estado de “gato de Schrödinger” ya que es la comprensión matemática de un gato de Schrödinger que está simultáneamente muerto y vivo.
- [10] P. Ehrenfest, *Z. Phys.* 45, 455 (1927).
- [11] A. Einstein, *Nachtraf Paul Ehrenfest*, Leiden-Doesburg, 1934.
- [12] Earle H. Kennard Dies, *Directed Naval Laboratories*. Citation: *Phys. Today* 21(8), 93 (1968); View online: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3035132>
- [13] V. P. Ermakov, *Universita Izvestia Kiev, Series III* 9 (1880) 1-25.
- [14] A. O. Harin, *Appl. Anal. Discrete Math.* 2 (2008), 123-145.
- [15] P. G. Leach, K. Andriopoulos, *Appl. Anal. Discrete Math.* 2 (2008), 146–157.
- [16] M. F. Guasti, *International Mathematical Forum*, 4 (2009) 795-804.
- [17] D. Schuch, *Symetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* 4 (2008), 043.
- [18] P. G. Kevrekidis, Y. Drossinos, *Mathematics and Computer Simulations* 74 (2007) 196-202
- [19] S. Kumar, A. Hasegawa, *Opt. Lett.* 22, 372 (1997).
- [20] A. Hasegawa, *Physica D*, 123, 267 (1998).
- [21] V. N. Serkin, A. Hasegawa, T. L. Belyaeva, *T.L. Phys. Rev. Lett.* 98, 074102 (2007).